SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Andrea Bonfiglioli

GRUPPI DI CARNOT ASSOCIATI A CAMPI VETTORIALI

15 gennaio 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Sunto. - In questo seminario ci occupiamo del seguente problema: data una famiglia di campi vettoriali regolari $X_1, \ldots, X_m$ su $\mathbb{R}^N$, ci chiediamo se esiste un gruppo omogeneo di Carnot $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ tale che $\sum_i X_i^2$ sia un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. A tale proposito troviamo condizioni necessarie e sufficienti sugli assegnati campi vettoriali affinché la risposta alla suddetta domanda sia positiva. Inoltre esibiamo una costruzione esplicita della legge di gruppo $\circ$ che verifica i requisiti di cui sopra, fornendo dimostrazioni dirette. La prova è essenzialmente basata su una opportuna versione della formula di Campbell-Hausdorff. Per finire, mostriamo svariati esempi non banali del nostro metodo costruttivo e ricordiamo alcuni fatti generali sulla formula di Campbell-Hausdorff.

English summary - In this paper, we are concerned with the following problem: given a set of smooth vector fields $X_1, \ldots, X_m$ on $\mathbb{R}^N$, we ask whether there exists a homogeneous Carnot group $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ such that $\sum_i X_i^2$ is a sub-Laplacian on $\mathbb{G}$. We find necessary and sufficient conditions on the given vector fields in order to give a positive answer to the question. Moreover, we explicitly construct the group law $\circ$ as above, providing direct proofs. Our main tool i a suitable version of the Campbell-Hausdorff formula. Finally, we exhibit several non-trivial examples of our construction and we recall some general properties of the Campbell-Hausdorff formula.

Gruppi di Carnot relativi a famiglie di campi vettoriali. *

ANDREA BONFIGLIOLI

1 Introduzione.

Scopo di questo seminario è presentare alcuni risultati relativi alla costruzione dei gruppi di Carnot canonicamente associati ad assegnate famiglie di campi vettoriali. Un gruppo di Carnot (o gruppo stratificato) è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso $(\mathbb{G}, \circ)$ la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione, i.e. una decomposizione diretta (nel senso degli spazi vettoriali) $\mathfrak{g} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ tale che $[W_1, W_i] = W_{i+1}$, $[W_1, W_r] = \{0\}$. Gran parte del rilievo che i gruppi stratificati rivestono nella teoria delle EDP è certamente dovuto al notevole risultato di Rothschild&Stein [RS] secondo cui ogni operatore del second'ordine somma di quadrati di campi vettoriali di Hörmander può essere approssimato (in un senso opportuno) da un sub-Laplaciano su un gruppo stratificato e libero. A parte il grandissimo numero di articoli in cui vengono studiati l'operatore di Laplace o il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg, molta letteratura è stata di recente dedicata ai sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot: sono stati estesi al contesto dei gruppi stratificati numerosi risultati di teoria del potenziale [BL1, BL2, BL3], di geometria sub-Riemanniana [GK, MSS], di teoria geometrica della misura [FSS, MS], sono state studiate proprietà di simmetria per soluzioni di equazioni semilineari [BiL, BP, GV2], mappe quasi-conformi [C, HH], sono state trattate classi particolarmente importanti quali i gruppi di tipo Heisenberg [B, CDKR], proprietà globali di soluzioni di equazioni sub-ellittiche [FF, GV1, MM], l'equazione del calore relativa ai sub-Laplaciani [BLU, BU], sono state fornite alcune applicazioni in teoria dei sistemi di controllo e nella formalizzazione matematica dello studio dei materiali cristallini, ecc.

Usualmente, il gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e la sua legge di composizione $\circ$ sono parte dei *dati* del problema ed ogni studio è condotto con lo scopo di trattare alcune proprietà ed aspetti della *assegnata* struttura di $\mathbb{G}$. D'altra parte, specialmente nell'analisi delle equazioni alle derivate parziali, una situazione opposta può presentarsi: data una famiglia di campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$ su $\mathbb{R}^N$, per esempio assegnata una somma di quadrati $\mathcal{L} = \sum_i X_i^2$, ci si può chiedere se esiste un gruppo di Lie $(\mathbb{G}, \circ)$ su $\mathbb{R}^N$ rispetto al quale ogni campo X_i sia invariante a sinistra e $\mathcal{L}$ sia un sub-Laplaciano. Inoltre, in caso la risposta sia affermativa, può essere altresì rilevante riuscire ad esibire esplicitamente una legge di gruppo $\circ$ che abbia le suddette proprietà. Lo scopo di questo seminario è trattare questi problemi.

Prima di citare i nostri risultati, ricordiamo brevemente la definizione di gruppo di Carnot a cui faremo riferimento nel seguito. Supponiamo che il gruppo di Lie $(\mathbb{R}^N, \circ)$ sia dotato di una famiglia di automorfismi $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ (dette *dilatazioni*) della forma

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \ldots, \lambda^r x^{(r)}), \tag{1.1}$$

*Investigation supported by University of Bologna. Funds for selected research topics.

ove $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ per $i = 1, \dots, r$ e $N_1 + \dots + N_r = N$. Denotiamo con $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie relativa a $(\mathbb{R}^N, \circ)$. Per $i = 1, \dots, N_1$, sia Y_i il campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ che coincide nell'origine con $\partial/\partial x_i^{(1)}$. Facciamo la seguente ipotesi: l'algebra di Lie generata da $Y_1, \dots, Y_{N_1}$ coincide con $\mathfrak{g}$. Sotto queste ipotesi, diciamo che $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ è un *gruppo di Carnot omogeneo*. Se $X_1, \dots, X_{N_1}$ è una qualsiasi base di span$\{Y_1, \dots, Y_{N_1}\}$, l'operatore differenziale del second'ordine $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^2$ sarà detto *un sub-Laplaciano* su $\mathbb{G}$. Non è difficile riconoscere che, a meno di isomorfismi, questa definizione coincide con la classica definizione di gruppo di Carnot (si veda, per i dettagli, [BU]).

In questo seminario, ci occupiamo del seguente problema: assegnata una famiglia di campi vettoriali $X_1, \dots, X_m$ su $\mathbb{R}^N$,

(i) troviamo condizioni necessarie e sufficienti (a due a due indipendenti e di semplice verifica) sugli X_j che assicurino che $\sum_{j \le m} X_j^2$ sia un sub-Laplaciano su un opportuno gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ (si vedano le ipotesi **(H0)**-**(H1)**-**(H2)** nella Sezione 2);

(ii) quando queste condizioni sono soddisfatte, costruiamo esplicitamente il gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$;

(iii) diamo alcuni esempi non banali della nostra costruzione.

Forniamo di seguito una breve descrizione di questa nota. Nella Sezione 2, richiamiamo alcune semplici proprietà necessariamente soddisfatte dai campi dell'algebra di un gruppo di Carnot omogeneo. Queste proprietà suggeriscono di assumere le ipotesi **(H0)**-**(H1)**-**(H2)** sui campi vettoriali $X_1, \dots, X_m$, al fine di risolvere (i). Nella Sezione 3, mostriamo che queste ipotesi sono anche sufficienti per risolvere il nostro problema: ci occupiamo infatti della costruzione del gruppo $\mathbb{G}$, come asserito in (ii) (si veda il Teorema 3.7). Definiamo una opportuna legge di gruppo su $\mathbb{R}^N$ attraverso la soluzione di tipo esponenziale di un certo sistema di equazioni differenziali ordinarie, canonicamente associato ai campi $X_1, \dots, X_m$. La prova dell'associatività di questa legge non è immediata. Il nostro intento è di fornire una dimostrazione la più diretta possibile: essa si basa su una formulazione debole della formula di Campbell-Hausdorff (si veda il Lemma 3.4). In particolare, intendiamo non sfruttare l'associatività della cosiddetta operazione di Campbell-Hausdorff su un'algebra di Lie, risultato che sembra piuttosto profondo. Per quanto riguarda (iii), nella Sezione 4 forniamo alcuni esempi della nostra costruzione. Per finire, nell'Appendice ricordiamo alcune referenze e risultati sulla formula di Campbell-Hausdorff, con particolare riferimento ad un articolo di Djoković [D].

I dettagli relativi alle prove dei risultati di questa nota si possono trovare in [Bo].

2 Gruppi omogenei di Carnot. Le ipotesi sui campi.

Per iniziare, diamo due definizioni di gruppo di Carnot. La prima è la definizione classica (si veda e.g. [F, p. 171], [RS, p. 256], [VSC, p. 44], [HK, p. 65]). La seconda, quella di gruppo omogeneo di Carnot, è più conveniente in un contesto analitico. A meno di isomorfismi, le due definizioni sono equivalenti (si veda [BU]). Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, per ogni coppia di sottoinsiemi V, W di $\mathfrak{g}$ poniamo

$$[V, W] := \text{span}\{[v, w] \mid v \in V, \ w \in W\}.$$

Definizione 2.1 (Gruppo di Carnot). *Un* gruppo di Carnot *(o* gruppo stratificato*) è un gruppo di Lie* $\mathbb{G}$ *connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *ammette una* stratificazione,

i.e. una decomposizione diretta (nel senso degli spazi vettoriali)

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r \quad \textit{tale che} \quad \begin{cases} [V_1, V_{i-1}] = V_i & \textit{se } 2 \le i \le r, \\ [V_1, V_r] = \{0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definizione 2.2 (Gruppo Omogeneo di Carnot). *Supponiamo che $\mathbb{R}^N$ sia dotato di una struttura di gruppo di Lie mediante l'operazione $\circ$. Supponiamo inoltre che su $\mathbb{R}^N$ sia assegnata una struttura omogenea mediante una famiglia $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ di automorfismi del gruppo $(\mathbb{R}^N, \circ)$ (dette* dilatazioni*) della forma seguente*

$$\delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \ldots, \lambda^r x^{(r)}). \tag{2.2}$$

Qui $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ per $i = 1, \ldots, r$ e $N_1 + N_2 + \cdots + N_r = N$. Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie del gruppo $(\mathbb{R}^N, \circ)$, ossia l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su $(\mathbb{R}^N, \circ)$. Per $i = 1, \ldots, N_1$, sia Y_i l'unico campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ che coincide con $\partial/\partial x_i^{(1)}$ nell'origine. Facciamo la seguente ipotesi:

(C1) *l'algebra di Lie generata da $Y_1, \ldots, Y_{N_1}$ coincide con $\mathfrak{g}$.*

Allora, $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ è detto gruppo omogeneo di Carnot *(di* passo *r e con N_1* generatori*).*

Il sub-Laplaciano canonico di $\mathbb{G}$ è l'operatore differenziale del second'ordine $\Delta_{\mathbb{G}} := \sum_{i=1}^{N_1} Y_i^2$. Un sub-Laplaciano di $\mathbb{G}$ è un operatore differenziale della forma $\sum_{i=1}^{N_1} X_i^2$, essendo $X_1, \ldots, X_{N_1}$ una qualsiasi base di $\text{span}\{Y_1, \ldots, Y_{N_1}\}$.

In breve, un gruppo di Carnot omogeneo è un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$ con l'ipotesi addizionale (C1). Vi sono semplici esempi di gruppi di Lie omogenei che non soddisfano (C1), come ad esempio il gruppo abeliano $(\mathbb{R}^2, +)$ con le dilatazioni $\delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)})$. Esempi classici di gruppi di Carnot e dei relativi sub-Laplaciani sono $(\mathbb{R}^N, +)$ con l'operatore di Laplace e il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ col Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$. È immediato verificare che un gruppo omogeneo di Carnot è anche un gruppo di Carnot secondo la Definizione 2.1. Tuttavia vi sono gruppi di Carnot che non sono gruppi di Carnot omogenei secondo la Definizione 2.2.

- L'operatore $\mathcal{L}_1 := (\partial_1)^2 + (\partial_2 + x_1\partial_3)^2$ è il sub-Laplaciano canonico sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{R}^3$ con l'operazione e la dilatazione seguenti

$$x \circ y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1 y_2), \qquad \delta_r(x) := (r x_1, r x_2, r^2 x_3).$$

- L'operatore $\mathcal{L}_2 := (\partial_1 - \frac{x_2}{2}\partial_3)^2 + (\partial_2 + \frac{x_1}{2}\partial_3)^2$ è il sub-Laplaciano canonico sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{R}^3$ con l'operazione e la dilatazione seguenti

$$x \circ y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \tfrac{1}{2} x_1 y_2 - \tfrac{1}{2} x_2 y_1), \qquad \delta_r(x) := (r x_1, r x_2, r^2 x_3).$$

- L'operazione su $\mathbb{R}^3$

$$x \circ y = (\text{settsinh}(\sinh(x_1) + \sinh(y_1)), x_2 + y_2 + \sinh(x_1) y_3, x_3 + y_3),$$

definisce un gruppo di Carnot che non è omogeneo rispetto ad alcuna dilatazione su $\mathbb{R}^3$ della forma (2.2). Poniamo

$$\mathcal{L}_3 := \left((1 + \sinh^2(x_1))^{-1/2}\partial_1\right)^2 + \left(\partial_3 + \sinh(x_1)\partial_2\right)^2.$$

- I tre gruppi di Carnot di cui sopra sono tutti tra loro isomorfi ed isomorfi al gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$. Ricordiamo che su $\mathbb{H}^1$ l'operazione e la dilatazione sono

$$x \circ y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + 2x_2y_1 - 2x_1y_2), \qquad \delta_r(x) := (rx_1, rx_2, r^2x_3).$$

Gli operatori $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ di cui sopra sono equivalenti al Laplaciano di Kohn

$$\Delta_{\mathbb{H}^1} = (\partial_1 + 2x_2\partial_3)^2 + (\partial_2 - 2x_1\partial_3)^2.$$

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un fissato gruppo omogeneo di Carnot di passo r ed N_1 generatori e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Nel seguito adotteremo la seguente notazione: I è la mappa identica su $\mathbb{G}$ e se $X = \sum_{i=1}^N a_i \partial_i$ è un campo vettoriale su $\mathbb{R}^N$, $XI = (a_1, \dots, a_N)^T$ è il vettore colonna delle componenti di X. Due campi vettoriali arbitrari possono essere linearmente indipendenti in $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ senza necessariamente essere linearmente indipendenti in ogni punto (come ad esempio i campi su $\mathbb{R}^2$ $(1,0)$ e $(0,x_1)$). Inoltre, due campi vettoriali possono essere linearmente dipendenti in ogni punto senza essere linearmente dipendenti in $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ (come $(1,0)$ e $(x_1, 0)$). Nessuna delle precedenti situazioni si può verificare per campi invarianti a sinistra su un gruppo di Lie.

Osservazione 2.1. Siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$. Se esiste $x_0 \in \mathbb{G}$ tale che $X_1I(x_0), \dots, X_mI(x_0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$, allora $X_1I(x), \dots, X_mI(x)$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in \mathbb{G}$. Viceversa, se esiste $x_0 \in \mathbb{G}$ e scalari $c_1, \dots, c_m$ tali che $c_1X_1I(x_0) + \dots + c_mX_mI(x_0) = 0$, allora $c_1X_1I(x) + \dots + c_mX_mI(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{G}$. Di conseguenza, se $X_1, \dots, X_m$ appartengono a $\mathfrak{g}$, essi sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono in ogni punto, o equivalentemente, se lo sono in almeno un punto.

Ricordiamo ora la definizione di mappa esponenziale su $\mathfrak{g}$. Se $X \in \mathfrak{g}$, allora, per ogni fissato $x \in \mathbb{G}$, il sistema di EDO

$$\dot\gamma(t) = (XI)(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x,$$

ha un'unica soluzione di classe C^∞ definita su $\mathbb{R}$. Se γ è tale soluzione, poniamo $\exp[X](x) = \gamma(1)$. La *mappa esponenziale* è definita da

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}, \quad \mathrm{Exp}\,(X) = \exp[X](0).$$

Chiamiamo *base jacobiana* di $\mathfrak{g}$ la base dei campi vettoriali in $\mathfrak{g}$ che coincidono nell'origine con le derivate parziali coordinate. Quando su $\mathfrak{g}$ è assegnata la base jacobiana, la matrice jacobiana di Exp nell'origine è la matrice identità, quindi Exp è un diffeomorfismo da un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$ su un intorno di $0 \in \mathbb{G}$. Ove definita, denotiamo con Log la mappa inversa di Exp. Sussiste una notevole relazione tra la legge di gruppo e la mappa esponenziale.

Osservazione 2.2. Quando $\mathrm{Log}\,(y)$ è ben posto, si ha $x \circ y = \exp[\mathrm{Log}\,(y)](x)$.

Questa osservazione mostra che l'operazione su $\mathbb{G}$ è determinata in modo univoco dall'algebra $\mathfrak{g}$ e quindi, se due gruppi omogenei di Carnot $(\mathbb{R}^N, \circ_1)$, $(\mathbb{R}^N, \circ_2)$ hanno la stessa algebra di Lie, allora $\circ_1$ e $\circ_2$ coincidono. Questo prova che, dati i campi regolari $X_1, \dots, X_m$ su $\mathbb{R}^N$, esiste al più una struttura di gruppo omogeneo di Carnot su $\mathbb{R}^N$ la cui algebra sia $\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$. Qui abbiamo indicato con $\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$ la più piccola sottoalgebra di $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ contenente $X_1, \dots, X_m$. Si ha

$$\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\} = \mathrm{span}\{X_J \mid J \in \{1, \dots, m\}^k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

ove, se $J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k$, abbiamo posto $X_J := [X_{j_1}, \dots [X_{j_{k-1}}, X_{j_k}] \dots]$. Diciamo che X_J è un commutatore di lunghezza k di $X_1, \dots, X_m$. Se $J = j_1$, diciamo inoltre che $X_J := X_{j_1}$

è un commutatore di lunghezza 1 di $X_1, \dots, X_m$.

Sia $\{\delta_\lambda\}_\lambda$ il gruppo di dilatazioni su $\mathbb{G}$ definito in (2.2). Una funzione a valori reali $a(x)$ definita su $\mathbb{G}$ è detta *δ_λ-omogenea* di grado $\beta \in \mathbb{R}$ se, per ogni $x \in \mathbb{G}$ e $\lambda > 0$, si ha $a(\delta_\lambda(x)) = \lambda^\beta a(x)$. Un operatore differenziale lineare X è detto *δ_λ-omogeneo* di grado $\beta \in \mathbb{R}$ se, per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{G})$ e $\lambda > 0$, si ha $X(\varphi \circ \delta_\lambda) = \lambda^\beta (X\varphi) \circ \delta_\lambda$. In riferimento alla forma (2.2) della dilatazione δ_λ, definiamo un *peso omogeneo* di un multi-indice $\gamma \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$, $|\gamma|_{\mathbb{G}} := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{N_i} i\, \gamma_j^{(i)}$.

Proposizione 2.3. *Le sole funzioni regolari δ_λ-omogenee di grado β sono i polinomi della forma $\sum_{|\gamma|_{\mathbb{G}}=\beta} c_\gamma x^\gamma$, $c_\gamma \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, un campo vettoriale regolare δ_λ-omogeneo di grado $k \le r$ ($k \in \mathbb{N}$) ha la forma seguente*

$$\sum_{j=1}^{N_k} a_j^{(k)} \cdot (\partial/\partial x_j^{(k)}) + \sum_{i=k+1}^{r} \sum_{j=1}^{N_i} a_j^{(i)}(x^{(1)}, \dots, x^{(i-k)}) \cdot (\partial/\partial x_j^{(i)}), \tag{2.3}$$

ove $a_j^{(i)}$ è un polinomio δ_λ-omogeneo di grado $i-k$. In particolare, un campo vettoriale regolare δ_λ-omogeneo di grado $k > r$ è necessariamente l'operatore nullo.

Grazie ai precedenti risultati, non è difficile dimostrare che i campi vettoriali della base jacobiana $\{Z_i^{(k)} \,|\, k \le r,\, i \le N_k\}$ hanno le seguenti proprietà:

(A0) $Z_1^{(1)}, \dots, Z_{N_1}^{(1)}$ sono linearmente indipendenti e δ_λ-omogenei di grado 1;

(A1) la dimensione di $\mathrm{span}\{Z_1^{(k)} I(x), \dots, Z_{N_k}^{(k)} I(x)\}$ non dipende da x ed è uguale a N_k;

(A2) la dimensione di $\mathrm{span}\{Z_i^{(k)} I(x) \,|\, k \le r,\, i \le N_k\}$ non dipende da x ed è uguale a N.

Torniamo ora al problema (i) della Sezione 1. A questo proposito, fino alla fine della presente sezione, $X_1, \dots, X_m$ ($m \ge 2$) sarà una famiglia fissata di campi vettoriali regolari su $\mathbb{R}^N$. Fissiamo alcune notazioni. Se X, Y sono campi vettoriali regolari, $[X, Y] = XY - YX$ denota l'usuale commutatore. Dato $k \in \mathbb{N}$, indichiamo con $W^{(k)}$ lo spazio vettoriale generato dai commutatori di lunghezza k di $X_1, \dots, X_m$ e, per $x \in \mathbb{R}^N$, poniamo

$$W^{(k)} I(x) := \mathrm{span}\{X I(x) \,|\, X \in W^{(k)}\} = \mathrm{span}\{X_J I(x) \,|\, J \in \{1, \dots, m\}^k\}.$$

Per finire, se $x \in \mathbb{R}^N$, si pone $\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\} I(x) := \mathrm{span}\{X I(x) \,|\, X \in \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}\}$. Le proprietà (A0)-(A1)-(A2) della base jacobiana di un gruppo di Carnot omogeneo suggeriscono di fare le seguenti ipotesi sui campi X_j.

Le ipotesi sui campi vettoriali. *Con le precedenti notazioni, assumiamo che i campi vettoriali regolari $X_1, \dots, X_m$ su $\mathbb{R}^N$ soddisfino le seguenti ipotesi: esiste una famiglia di dilatazioni su $\mathbb{R}^N$ della forma*

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \dots, \lambda^r x^{(r)}) \tag{2.4}$$

(ove $r \ge 1$ è un intero fissato, $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ ($i = 1, \dots, r$) e $N_1 + \dots + N_r = N$), tale che

(H0) *$X_1, \dots, X_m$ sono δ_λ-omogenei di grado 1 e sono linearmente indipendenti;*

(H1) $\dim(W^{(k)}) = \dim(W^{(k)} I(0))$, *per ogni $k = 1, \dots, r$;*

(H2) $\dim(\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\} I(0)) = N$.

Lo scopo della Sezione 3 è mostrare che le precedenti ipotesi sui campi $X_1, \dots, X_m$ sono sufficienti (oltre che necessarie) affinchè $\sum_{i=1}^m X_i^2$ sia un sub-Laplaciano su un opportuno gruppo omogeneo di Carnot. L'ipotesi **(H0)** è il requisito minimo su $X_1, \dots, X_m$ affinchè essi definiscano un sub-Laplaciano su un gruppo di *tipo omogeneo*. L'ipotesi **(H1)** è suggerita dall'Osservazione 2.1. Inoltre, in poche parole, quando l'ipotesi **(H2)** è verificata, allora l'algebra di Lie astratta $\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$ ha la "giusta" dimensione N per poter essere l'algebra di un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$. Seguendo **(H1)**, l'ultima ipotesi potrebbe anche essere sostituita da

$$\textbf{(H2)'} \quad \dim(W^{(1)}) + \dots + \dim(W^{(r)}) = N.$$

Abbiamo preferito scriverla in una forma che ricorda la condizione d'ipoellitticità di Hörmander per una somma di campi vettoriali (qui la condizione è richiesta in un solo punto). Come noto, la condizione di Hörmander è sempre verificata per un sub-Laplaciano. Osserviamo esplicitamente che le condizioni **(H0)**-**(H1)**-**(H2)** sono indipendenti. Infatti:

- i campi vettoriali ∂_{x_1}, ∂_{x_2} su $\mathbb{R}^3$, assieme con le dilatazioni euclidee, soddisfano **(H0)** e **(H1)** ma non **(H2)**;
- i campi vettoriali ∂_{x_1}, ∂_{x_2}, $\partial_{x_1} + x_2\,\partial_{x_3}$ su $\mathbb{R}^3$, assieme con le dilatazioni $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3)$, soddisfano **(H0)** e **(H2)** ma non **(H1)**;
- i campi vettoriali $\partial_{x_1} + x_1\,\partial_{x_2}$, ∂_{x_2} su $\mathbb{R}^2$ soddisfano **(H1)** e **(H2)** ma non soddisfano **(H0)** per *nessuna* dilatazione $(\lambda^\alpha x_1, \lambda^\beta x_2)$ su $\mathbb{R}^2$.

Si può dimostrare che la dimensione $\dim(W^{(k)})$ dello *strato* di commutatori $W^{(k)}$ è legata alla forma (2.4) delle dilatazioni δ_λ.

Proposizione 2.4. *Se $X_1, \dots, X_m$ soddisfano le ipotesi* **(H0)**-**(H1)**-**(H2)**, *allora per ogni $k = 1, \dots, r$ si ha $\dim(W^{(k)}) = N_k$, ove $N_1, \dots, N_r$ sono come in* (2.4).

Non è difficile dimostrare che se $X_1, \dots, X_m$ soddisfano le ipotesi **(H0)**-**(H1)**-**(H2)**, allora essi hanno anche le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} &\textbf{(H1)}^* \quad \dim(W^{(k)} I(x)) = \dim(W^{(k)}), \quad \forall k \le r,\ \forall x \in \mathbb{R}^N. \\ &\textbf{(H2)}^* \quad \dim(\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\} I(x)) = N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

La **(H2)*** è la ben nota condizione d'ipoellitticità di Hörmander per i campi $X_1, \dots, X_m$.

3 Costruzione del gruppo.

Per cominciare, ricordiamo alcuni risultati di base sulla soluzione di "tipo esponenziale" di un sistema autonomo di EDO. Faremo uso di notazioni simili a quelle usate per la mappa esponenziale sui gruppi di Lie. Tuttavia, osserviamo esplicitamente che qui non si suppone sia data alcuna struttura di gruppo.

Sia assegnato $X = \sum_{j=1}^N (XI)_j\,\partial_j$, campo vettoriale regolare su $\mathbb{R}^N$. Sia poi $x \in \mathbb{R}^N$ fissato. Sia $\gamma(t)$ la soluzione con dominio massimale $\mathcal{D}(X, x) \subseteq \mathbb{R}$ del problema autonomo ordinario di Cauchy

$$\text{(C)} \qquad \dot\gamma(t) = XI(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x. \tag{3.1}$$

Scriveremo anche $\gamma(t) = \gamma(t; x) = \gamma_X(t; x)$. Ogniqualvolta $1 \in \mathcal{D}(X, x)$, si pone

$$\exp[X](x) := \gamma_X(1; x).$$

Per ogni fissato K sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$, esiste $\varepsilon_K > 0$ tale che $\gamma(t;x)$ è ben posta per ogni $(t;x) \in (-\varepsilon_K, \varepsilon_K) \times K$. Dall'unicità della soluzione di (C), si ottiene

$$x \in K, \quad |s| + |t| < \varepsilon_K \quad \Rightarrow \quad \gamma_X(s;\gamma_X(t;x)) = \gamma_X(s+t;x)$$
$$x \in K, \quad |\lambda t| < \varepsilon_K \quad \Rightarrow \quad \gamma_X(\lambda t;x) = \gamma_{\lambda X}(t;x).$$

Dalle precedenti si trae che, se K è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo, allora $\exp[\lambda X](x)$ è ben posto per ogni $x \in K$. Se $\exp[-X](\exp[X](x))$ è ben posto si ha, $\exp[-X](\exp[X](x)) = x$. Inoltre, da (3.2), segue $\exp[tX](x) = \gamma(t)$, ove γ è la soluzione di (C). Per la regolarità di X, $\gamma(t)$ è infinitamente derivabile attorno a 0 ed il suo sviluppo di Taylor è dato da

$$\gamma(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} X^k I(x) \cdot t^k + O_x(t^{n+1}), \quad \text{se } t \to 0. \tag{3.2}$$

Qui $X^0 := I$ e X^k è la potenza k-esima dell'operatore X. (3.2) segue da

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\gamma(t))) = (Xf)(\gamma(t)), \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

Questi risultati saranno utilizzati in seguito senza richiamarli. Per tutta questa sezione, $\{\delta_\lambda\}_\lambda$ è una fissata famiglia di dilatazioni su $\mathbb{R}^N$ come in (2.4), mentre $X_1, \dots, X_m$ è una famiglia di campi vettoriali soddisfacenti alle ipotesi **(H0)**-**(H1)**-**(H2)** della Sezione 2. Poniamo $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$. Per ogni $k = 1, \dots, r$, $Z_1^{(k)}, \dots, Z_{N_k}^{(k)}$ è una fissata base di $W^{(k)}$. Da (2.3) segue

$$Z_j^{(k)} = \sum_{r=1}^{N_k} a_{k,r}^{(k,j)} \partial/\partial x_r^{(k)} + \sum_{s=k+1}^{r} \sum_{r=1}^{N_s} a_{s,r}^{(k,j)} \partial/\partial x_r^{(s)}, \tag{3.3}$$

ove $a_{s,r}^{(k,j)}$ è un polinomio δ_λ-omogeneo di grado $s-k$. Per finire, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ poniamo $\xi \cdot Z := \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j^{(k)} Z_j^{(k)}$. Il seguente risultato sarà cruciale nel seguito.

Proposizione 3.1. *Nelle notazioni precedenti, la mappa*

$$\mathrm{Exp} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \xi \mapsto \mathrm{Exp}\,(\xi) := \exp[\xi \cdot Z](0)$$

è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^N$ in sè con componenti polinomiali. La funzione inversa di Exp, *che denotiamo con* Log, *ha anch'essa componenti polinomiali.*

Dimostrazione. Per definizione, si ha $\mathrm{Exp}\,(\xi) = \gamma(1)$, ove γ risolve il problema di Cauchy

$$(\mathrm{P})_1 \qquad \dot\gamma(t) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j^{(k)} Z_j^{(k)} I(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = 0.$$

Fissiamo $k \in \{1, \dots, r\}$ e $j \in \{1, \dots, N_k\}$. Secondo la notazione introdotta in (2.4), il sistema $(\mathrm{P})_1$ può essere scritto nella forma

$$(\mathrm{P})_2 \quad \begin{cases} \dot\gamma^{(1)}(t) = A_1^{(1)} \cdot \xi^{(1)}, & \gamma^{(1)}(0) = 0 \\ \dot\gamma^{(2)}(t) = A_2^{(2)} \cdot \xi^{(2)} + A_2^{(1)}(\gamma^{(1)}(t)) \cdot \xi^{(1)}, & \gamma^{(2)}(0) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dot\gamma^{(r)}(t) = A_r^{(r)} \cdot \xi^{(r)} + \sum_{k=1}^{r-1} A_r^{(k)}(\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(r-k)}(t)) \cdot \xi^{(k)}, & \gamma^{(r)}(0) = 0, \end{cases}$$

Qui, per ogni $s \le r$ e $k \le s$, abbiamo introdotto la matrice di ordine $N_s \times N_k$

$$A_s^{(k)} = A_s^{(k)}(x^{(1)}, \dots, x^{(s-k)}) := (a_{s,i}^{(k,j)}(x))_{1 \le i \le N_s,\ 1 \le j \le N_k}$$

dove $a_{s,r}^{(k,j)}$ è un polinomio δ_λ-omogeneo di grado $s-k$ (si veda (3.3)). In particolare, è immediato riconoscere che $\gamma^{(1)}$ dipende solo da $\xi^{(1)}$ (in modo polinomiale), $\gamma^{(2)}$ dipende solo da $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ (in modo polinomiale), e così via. È quindi immediato provare che Exp(ξ) ha componenti polinomiali. Per finire, per ogni assegnato $\eta \in \mathbb{R}^N$, l'equazione $\eta = \text{Exp}(\xi)$ può essere riscritta come

$$\eta^{(1)} = A_1^{(1)} \cdot \xi^{(1)}, \quad \eta^{(2)} = A_2^{(2)} \cdot \xi^{(2)} + f^{(2)}(\xi^{(1)}), \quad \dots, \quad \eta^{(r)} = A_r^{(r)} \cdot \xi^{(r)} + f^{(r)}(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r-1)}),$$

ove $f^{(2)}, \dots, f^{(r)}$ sono funzioni a componenti polinomiali e le matrici $A_k^{(k)}$ sono tutte invertibili. Di conseguenza, Exp è biettiva e la sua inversa ha componenti polinomiali. ∎

Dalle definizioni di Exp e Log, segue

$$\exp[\text{Log}(x) \cdot Z](0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N; \qquad \text{Log}(\exp[\xi \cdot Z](0)) = \xi, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Possiamo ora definire la legge di gruppo associata ai campi $X_1, \dots, X_m$. La seguente definizione ci è suggerita dall'Osservazione 2.2.

Definizione 3.2. *Se $X_1, \dots, X_m$ soddisfano le ipotesi* **(H0)-(H1)-(H2)**, *si pone*

$$x,\ y \in \mathbb{R}^N, \quad x \circ y := \exp[\text{Log}(y) \cdot Z](x).$$

A prima vista, $\circ$ sembra dipendere dalla scelta della base Z per $\mathfrak{g}$. Tuttavia non è così, come segue una volta provato che $\circ$ definisce una struttura di gruppo omogeneo di Carnot su $\mathbb{R}^N$ con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (che è fissata con i campi). Siccome $X_1, \dots, X_m$ sono campi regolari, l'applicazione $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,y) \mapsto x \circ y \in \mathbb{R}^N$ è di classe C^∞. Il seguente risultato, assieme alla Proposizione 2.3, prova che $\circ$ ha in effetti componenti polinomiali.

Teorema 3.3. *Con le notazioni della Definizione 3.2, si ha*

$$\delta_\lambda(x \circ y) = (\delta_\lambda(x)) \circ (\delta_\lambda(y)), \qquad \forall \lambda > 0,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^N.$$

Infatti, una volta provato che, per ogni $\lambda > 0$, η, $y \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$\text{Exp}(\delta_\lambda(\eta)) = \delta_\lambda(\text{Exp}(\eta)), \qquad \delta_\lambda(\text{Log}(y)) = \text{Log}(\delta_\lambda(y)),$$

segue

$$\begin{aligned}\delta_\lambda(x \circ y) &= \delta_\lambda\big(\exp[(\text{Log}\, y) \cdot Z](x)\big) = \exp[\delta_\lambda(\text{Log}(y)) \cdot Z]\,(\delta_\lambda(x)) \\ &= \exp[\text{Log}(\delta_\lambda(y)) \cdot Z](\delta_\lambda(x)) = (\delta_\lambda(x)) \circ (\delta_\lambda(y)).\end{aligned}$$

Il seguente passo fondamentale è provare che $\circ$ definisce su $\mathbb{R}^N$ una struttura di gruppo. A tal fine, facciamo uso del seguente risultato, che è una formulazione debole della formula di Campbell-Hausdorff (si veda l'Appendice).

Lemma 3.4. *Per ogni X, $Y \in \mathfrak{g}$ esiste $H \in \mathfrak{g}$ tale che*

$$\exp[Y]\big(\exp[X](x)\big) = \exp[H](x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Osserviamo esplicitamente che H dipende solo da X e Y (e dalla struttura di $\mathfrak{g}$), mentre non dipende da x.

Il Lemma 3.4 ci permette di definire su $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$ un'operazione binaria $\diamond$, come ora ci accingiamo a descrivere. Proveremo alla fine della sezione che questa operazione è associativa, deducendolo come *conseguenza* dell'associatività di $\circ$, e non viceversa. Siano X, $Y \in \mathfrak{g}$ arbitrariamente assegnati. Grazie al Lemma 3.4, possiamo scegliere un campo $H = H(X,Y) \in \mathfrak{g}$ (che a priori non è unico) tale che valga (3.4); per tale scelta di H, poniamo $X \diamond Y := H(X,Y)$. Questo definisce un'operazione binaria $(X,Y) \mapsto X \diamond Y$ su $\mathfrak{g}$. Siccome l'applicazione

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \xi \mapsto \xi \cdot Z := \textstyle\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j^{(k)} Z_j^{(k)}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali, possiamo anche definire un'operazione su $\mathbb{R}^N$ come segue: per ogni ξ, $\eta \in \mathbb{R}^N$ poniamo $\xi * \eta := \zeta$ dove ζ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^N$ tale che $(\xi \cdot Z) \diamond (\eta \cdot Z) = \zeta \cdot Z$. Da queste definizioni si ha

$$\exp[\eta \cdot Z]\big(\exp[\xi \cdot Z](x)\big) = \exp[(\xi * \eta) \cdot Z](x). \tag{3.5}$$

Ciò ha una fondamentale conseguenza: fissati x, $y \in \mathbb{R}^N$, dalla Definizione 3.2, si ottiene

$$\begin{aligned} x \circ y &= \exp[\mathrm{Log}\,(y) \cdot Z](x) = \exp[\mathrm{Log}\,(y) \cdot Z]\big(\exp[\mathrm{Log}\,(x) \cdot Z](0)\big) \\ &= \exp\big[(\mathrm{Log}\,(x) * \mathrm{Log}\,(y)) \cdot Z\big](0) = \mathrm{Exp}\,\big(\mathrm{Log}\,(x) * \mathrm{Log}\,(y)\big). \end{aligned}$$

Questo dà, per ogni x, $y \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$

$$\mathrm{Log}\,(x \circ y) = \mathrm{Log}\,(x) * \mathrm{Log}\,(y), \qquad \mathrm{Exp}\,(\xi * \eta) = \mathrm{Exp}\,(\xi) \circ \mathrm{Exp}\,(\eta). \tag{3.6}$$

Teorema 3.5. *Sia $\circ$ come nella Definizione 3.2. Allora $(\mathbb{R}^N, \circ)$ è un gruppo.*

Dimostrazione. È immediato provare che 0 è elemento neutro per $\circ$ e che l'inverso di $x \in \mathbb{R}^N$ è dato da $x^{-1} = \mathrm{Exp}\,(-\mathrm{Log}\,(x))$. Per finire, fissiamo x, y, $z \in \mathbb{R}^N$. Dobbiamo provare che $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. Infatti, da (3.5) segue

$$(x \circ y) \circ z = \exp[\mathrm{Log}\,(z) \cdot Z]\big(\exp[\mathrm{Log}\,(y) \cdot Z](x)\big) = \exp\big[(\mathrm{Log}\,(y) * \mathrm{Log}\,(z)) \cdot Z\big](x),$$

mentre, da (3.6) si ottiene

$$x \circ (y \circ z) = \exp[\mathrm{Log}\,(y \circ z) \cdot Z](x) = \exp\big[(\mathrm{Log}\,(y) * \mathrm{Log}\,(z)) \cdot Z\big](x).$$

Questo conclude la prova. ∎

Per il Teorema 3.5, $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, \circ)$ è un gruppo di Lie. È naturale chiedersi se $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$ coincide con l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$.

Teorema 3.6. *Ciascuno dei campi $Z_j^{(k)}$ $(k \le r,\ j \le N_k)$ è invariante a sinistra su $(\mathbb{R}^N, \circ)$.*

Segue dall'associatività di $\circ$.

Osservazione 3.1. Per il Teorema 3.6, segue che $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$ è contenuto nell'algebra di Lie di $\mathbb{G}$, che è N-dimensionale siccome la varietà soggiacente a $\mathbb{G}$ è $\mathbb{R}^N$. D'altra parte, anche $\mathfrak{g}$ è N-dimensionale e quindi l'algebra di $\mathbb{G}$ coincide con $\mathfrak{g}$.

Non è difficile ora dimostrare il seguente risultato.

Teorema 3.7. *Siano $X_1, \dots, X_m$ campi vettoriali regolari soddisfacenti alle ipotesi* **(H0)**-**(H1)**-**(H2)** *della Sezione 2. Sia $\{\delta_\lambda\}_\lambda$ la famiglia di dilatazioni definita in* (2.4). *Per finire, sia $\circ$ l'operazione su $\mathbb{R}^N$ introdotta nella Definizione 3.2. Allora $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ è un gruppo omogeneo di Carnot di passo r e m generatori. Inoltre, l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ coincide con* $\mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}$ *e $\sum_{j=1}^{m} X_j^2$ è un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$.*

Osservazione 3.2. Dalle relazioni (3.6), segue che le operazioni binarie $*$ su $\mathbb{R}^N$ e (attraverso la naturale identificazione di $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^N$) $\diamond$ su $\mathfrak{g}$ definiscono delle strutture di gruppi di Lie isomorfi a $(\mathbb{G}, \circ)$ e i seguenti sono isomorfismi di gruppi di Lie:

$$\mathrm{Exp} : (\mathbb{R}^N, *) \to (\mathbb{G}, \circ), \;\; \xi \mapsto \mathrm{Exp}(\xi) \qquad \pi : (\mathbb{R}^N, *) \to (\mathfrak{g}, \diamond), \;\; \xi \mapsto \xi \cdot Z.$$

4 Esempi.

Dato $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{B}_n$ denoterà la seguente matrice quadrata di ordine n (nilpotente di passo n)

$$\mathbb{B}_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

4.1 Il Laplaciano classico e quello di Kohn.

Gli esempi più semplici di sub-Laplaciani sono gli operatori ellittici a coefficienti costanti e il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. Trattiamo brevemente questi due casi.

L'unico esempio di gruppo omogeneo di Carnot di passo 1 è dato dall'usuale gruppo additivo su $\mathbb{R}^N$. Se δ_λ denota l'usuale dilatazione euclidea su $\mathbb{R}^N$, una famiglia di campi che verifica le ipotesi **(H0)-(H1)-(H2)** è necessariamente data da $\{X_j\}_{j \le N}$ ove $X_j = \sum_{i=1}^N a_{i,j}\, \partial_i$ e $A = (a_{i,j})_{i,j}$ è una matrice invertibile di ordine N e quindi $\sum_{j=1}^N X_j^2$ è un operatore ellittico a coefficienti costanti. Dati ξ, $x \in \mathbb{R}^N$, si ha $\exp[\xi](x) := \exp[\sum_{j=1}^N \xi_j X_j](x) = \gamma(1)$, ove $\dot\gamma(r) = A \cdot \xi$ e $\gamma(0) = x$. Ne segue $\exp[\xi](x) = x + A \cdot \xi$, $\mathrm{Exp}(\xi) = A \cdot \xi$, $\mathrm{Log}(y) = A^{-1} \cdot y$ e quindi $x \circ y = \exp[\mathrm{Log}(y)](x) = x + y$.

Consideriamo $\mathbb{H}^n := \mathbb{R}^{2n+1}$ i cui punti saranno denotati con $z = (x, y, t)$, x, $y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Consideriamo i campi $X_j := \partial_{x_j} + 2y_j\, \partial_t$, $Y_j := \partial_{y_j} - 2x_j\, \partial_t$ $(j = 1, \ldots, n)$. Se su $\mathbb{H}^n$ introduciamo le dilatazioni $\delta_\lambda(z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t)$, è facile riconoscere che i suddetti $2n$ campi soddisfano le ipotesi **(H0)-(H1)-(H2)**. Poniamo $T := [X_j, Y_j] = -4\, \partial_t$. Dati $\zeta = (\xi, \eta, \tau)$, $z = (x, y, t) \in \mathbb{H}^n$, si ha $\exp[\zeta](z) := \exp[\sum_{j=1}^n (\xi_j X_j + \eta_j Y_j) + \tau T](z) = (\mu(1), \nu(1), \rho(1))$ ove

$$(\dot\mu, \dot\nu, \dot\rho)(r) = (\xi, \eta, -4\tau + 2\langle \nu(r), \xi\rangle - 2\langle \mu(r), \eta\rangle), \quad (\mu, \nu, \rho)(0) = (x, y, t).$$

Ne segue allora $\exp[\zeta](z) = (x + \xi, y + \eta, t - 4\tau + 2\langle y, \xi\rangle - 2\langle x, \eta\rangle)$, e quindi $\mathrm{Exp}(\zeta) = (\xi, \eta, -4\tau)$, $\mathrm{Log}(z') = (x', y', -t'/4)$. Fissati ora z, $z' \in \mathbb{H}^n$, si ha

$$z \circ z' = \exp[\mathrm{Log}(z')](z) = (x + x', y + y', t + t' + 2\langle y, x'\rangle - 2\langle x, y'\rangle).$$

Il gruppo $(\mathbb{H}^n, \circ)$ è il ben noto gruppo di Heisenberg, mentre l'operatore $\Delta_{\mathbb{H}^n} := \sum_{j=1}^n \left(X_j^2 + Y_j^2\right)$ è il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg.

4.2 Sub-Laplaciani di tipo Bony.

Introduciamo ora un nuovo esempio di gruppo omogeneo di Carnot. In [B, Remarque 3.1], J.M. Bony si riferisce al seguente operatore L su $\mathbb{R}^{N+1}$ (i cui punti denotiamo con $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$)

$$L = \tfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \left(x_0 \tfrac{\partial}{\partial x_1} + x_0^2 \tfrac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_0^N \tfrac{\partial}{\partial x_N}\right)^2$$

come ad un esempio di somma di quadrati che verifica l'ipotesi di Hörmander e che tuttavia ha una forma quadratica "molto degenere". Evidentemente L non è un sub-Laplaciano su alcun gruppo di

Carnot, in quanto il campo $\sum_{j=1}^{N} x_0^j \, \partial/\partial x_j$ si annulla sull'iperpiano $x_0 = 0$. È tuttavia sufficiente aggiungere una variabile per *liftare* l'operatore ad un sub-Laplaciano. Consideriamo infatti su $\mathbb{R}^{2+N}$ (i cui punti saranno denotati con (t, s, x), t, $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$) il seguente operatore

$$\mathcal{L} := T^2 + S^2, \quad \text{ove} \quad T := \partial_t, \; S := \partial_s + t\,\partial_{x_1} + \tfrac{t^2}{2!}\partial_{x_2} + \cdots + \tfrac{t^N}{N!}\partial_{x_N} = \partial_s + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \tfrac{t^j}{j!}\partial_{x_j}.$$

Se consideriamo su $\mathbb{R}^{2+N}$ la famiglia di dilatazioni definita da

$$\delta_\lambda(t, s, x) := (\lambda\, t, \lambda\, s, \lambda^2 x_1, \lambda^3 x_2, \ldots, \lambda^{N+1} x_N),$$

è immediato verificare che i campi T e S sono linearmente indipendenti e δ_λ-omogenei di grado 1 e dunque verificano l'ipotesi **(H0)**. Per ogni $k = 1, \ldots, N$ consideriamo poi

$$X_k := \underbrace{[T, [T, \cdots [T}_{k \text{ volte}}, S] \cdots]] = \textstyle\sum_{j=k}^{N} \tfrac{t^{j-k}}{(j-k)!}\partial_{x_j} = \partial_{x_k} + t\,\partial_{x_{k+1}} + \cdots + \tfrac{t^{N-k}}{(N-k)!}\partial_{x_N}.$$

Nelle notazioni dei paragrafi precedenti si ha $W^{(1)} = \operatorname{span}\{T, S\}$, $W^{(k+1)} = \operatorname{span}\{X_k\}$ ($k = 1, \ldots, N$) e $\dim(\operatorname{Lie}\{T, S\} I(0)) = 2 + N$, e dunque anche le ipotesi **(H1)** e **(H2)** sono verificate. Ne segue che $\mathcal{L}$ è un sub-Laplaciano su un opportuno gruppo di Carnot $(\mathbb{G}, \circ)$ su $\mathbb{R}^{2+N}$, avente passo $1 + N$ e 2 generatori. Si può dimostrare facilmente (col procedimento illustrato nei paragrafi precedenti) che la legge di gruppo $\circ$ per $\mathbb{G}$ è data da

$$(t, s, x) \circ (\tau, \sigma, y) = (\tau + t, \sigma + s, x_1 + y_1 + \sigma t, \ldots, x_N + \textstyle\sum_{k=1}^{N} y_k \tfrac{t^{N-k}}{(N-k)!} + \sigma \tfrac{t^N}{N!}).$$

4.3 Una classe di sub-Laplaciani in Teoria dei Sistemi di Controllo.

In questo esempio, trattiamo in dettaglio un tipo di gruppo di Carnot che si presenta in Teoria dei Sistemi di Controllo, rinviando a [A] per una descrizione della sua rilevanza in questo contesto. In $\mathbb{R}^N$ consideriamo i seguenti campi vettoriali

$$X_1 := \partial_1 + x_2\,\partial_3 + x_3\,\partial_4 + \cdots + x_{N-1}\,\partial_N, \quad X_2 := \partial_2.$$

Per ogni $k = 3, \ldots, N$ si ha $X_k := [X_{k-1}, X_1] = \partial_k$ ed è dunque immediato riconoscere che i campi X_1, X_2 verificano le ipotesi **(H0)**-**(H1)**-**(H2)** rispetto alla famiglia di dilatazioni

$$\delta_\lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) := (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \lambda^2 x_3, \ldots, \lambda^{N-1} x_N).$$

Ne segue che $\mathcal{L} = X_1^2 + X_2^2$ è un sub-Laplaciano su un opportuno gruppo di Carnot $(\mathbb{G}, \circ)$ su $\mathbb{R}^N$, avente passo $N - 1$ e con 2 generatori. In [A] viene data una rappresentazione di $\mathbb{G}$ mediante matrici della seguente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_N \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2!} & \cdots & \frac{x_1^{N-2}}{(N-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{x_1^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{G},$$

mentre la legge di gruppo è ovviamente l'usuale prodotto matriciale. Di seguito mostriamo come ottenere l'operazione anche nel modo descritto nei paragrafi precedenti. Sia $\xi \in \mathbb{R}^N$ fissato. Si ha

$$\sum_{k=1}^N \xi_k X_k = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \xi_1 x_2, \dots, \xi_N + \xi_1 x_{N-1}) = \xi + \xi_1 H \cdot x,$$

ove H è la seguente matrice quadrata di ordine N

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Ne segue $\exp[\xi](x) := \exp[\sum_{k=1}^N \xi_k X_k](x) = \gamma(1)$ ove $\dot\gamma(r) = \xi + \xi_1 H \cdot \gamma(r)$, $\gamma(0) = x$, da cui

$$\gamma(r) = \exp(\xi_1 r H) \cdot x + \int_0^r \exp(\xi_1 (r-t) H) \cdot \xi \, dt.$$

In particolare, si ha

$$\exp[\xi](x) = \exp(\xi_1 H) \cdot x + \int_0^1 \exp(\xi_1 (1-t) H) \cdot \xi \, dt,$$
$$\mathrm{Exp}\,(\xi) = \int_0^1 \exp(\xi_1 (1-t) H) \cdot \xi \, dt.$$

È immediato osservare che per ogni $\rho \in \mathbb{R}$ risulta

$$\exp(\rho H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\rho \mathbb{B}_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Dato $y = (y_1, \widehat{y}) \in \mathbb{R}^N$, l'equazione $y = \mathrm{Exp}\,(\xi)$ è equivalente al seguente sistema (posto $\xi = (\xi_1, \widehat{\xi}) \in \mathbb{R}^N$)

$$\begin{cases} y_1 = \xi_1, \\ \widehat{y} = \int_0^1 \exp\left(\xi_1(1-t)\mathbb{B}_{N-1}\right) \cdot \widehat{\xi} \, dt. \end{cases}$$

Di conseguenza si ottiene

$$\mathrm{Log}\,(y) = \left(y_1, \left(\int_0^1 \exp(y_1(1-t)\mathbb{B}_{N-1}) \, dt\right)^{-1} \cdot \widehat{y}\right).$$

Dati x e $y \in \mathbb{R}^N$ si ha quindi

$$\begin{aligned} x \circ y &= \exp[\mathrm{Log}\,(y)](x) = y + \exp(y_1 H) \cdot x = (y_1 + x_1, \widehat{y} + \exp(y_1 \mathbb{B}_{N-1}) \cdot \widehat{x}) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3 + y_1 x_2, \dots, y_N + \textstyle\sum_{j=2}^N \frac{y_1^{N-j}}{(N-j)!} x_j). \end{aligned}$$

4.4 Sub-Laplaciani di tipo Kolmogorov.

In [LPo] viene per la prima volta introdotta una struttura di gruppo naturalmente associata ad una classe di operatori ipoellittici ultraparabolici che includono i classici operatori modello di Kolmogorov-Fokker-Planck. Mostriamo come questa struttura definisca un gruppo omogeneo di Carnot. Su $\mathbb{R}^N$ consideriamo l'operatore

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{p_1} (\partial_{x_j})^2 + (\partial_t - \langle x, B \cdot \nabla \rangle)^2 =: \sum_{j=1}^{p_1} X_j^2 + Y^2,$$

ove $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})^T$ mentre B è una matrice quadrata $N \times N$ del tipo seguente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B^{(r)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove, per $j = 1\dots,r$, $B^{(j)}$ è una matrice di ordine $p_j \times p_{j+1}$ di rango p_{j+1}, $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{r+1} \geq 1$ e $p_1 + p_2 + \cdots + p_{r+1} = N$. Consideriamo poi su $\mathbb{R}^{N+1}$ la seguente famiglia di dilatazioni

$$\delta_\lambda(t,x) := (\lambda\, t, \lambda\, x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \dots, \lambda^{r+1} x^{(r+1)}),$$

ove, per ogni $j = 1,\dots,r+1$, $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{p_j}$. Non è difficile mostrare che i campi $X_1,\dots,X_{p_1},Y$ verificano le ipotesi **(H0)-(H1)-(H2)**. L'operazione di gruppo che si può costruire come mostrato nella Sezione 3 risulta essere

$$(t,x)\circ(s,y) = (t+s, y + \exp(-sB^T)\cdot x).$$

Osserviamo esplicitamente che questa è la stessa operazione di gruppo data in [LPo]. $(\mathbb{R}^{N+1},\circ)$ è un gruppo omogeneo di Carnot di passo $r+1$ e con $1+p_1$ generatori. Osserviamo infine che, se $r = N-1$, $p_{r+1} = p_j = 1$ e $B^{(j)} = (1)$ per ogni $j = 1,\dots,r$, l'operatore differenziale del second'ordine

$$\big(-\partial_t + x_1\,\partial_{x_2} + x_2\,\partial_{x_3} + \cdots + x_{N-1}\,\partial_{x_N}\big)^2 + (\partial_{x_1})^2$$

è un sub-Laplaciano di tipo Kolmogorov su $\mathbb{R}^{1+N}$ analogo a quello studiato in [A] (Esempio 4.3).

5 Appendice. La formula di Campbell-Hausdorff.

Lo scopo dell'Appendice è di dare una traccia della prova del Lemma 3.4 (si veda la Parte 2). Inoltre, partendo da alcune osservazioni sulla formula di Campbell-Hausdorff e da alcuni risultati generali sulla teoria dei gruppi e delle algebre di Lie, mostriamo un modo standard di costruire nuovi esempi di gruppi di Carnot (si veda la Parte 1).

Parte 1. La formula di Campbell-Hausdorff per i gruppi di Lie ed un'applicazione.

Per cominciare, richiamiamo alcuni riferimenti bibliografici ed alcuni risultati noti sulla formula di Campbell-Hausdorff. Brevemente, se X e Y sono due indeterminate non commutative, la formula di (Baker-)Campbell-(Dynkin-)Hausdorff dice che "log(exp(X) exp(Y))" è esprimibile in termini di una somma infinita di commutatori iterati di X e Y. Questo asserto può essere reso preciso in molti contesti: per serie formali, per algebre di matrici, per algebre di Banach normate, per gruppi di Lie finito-dimensionali, per soluzioni di equazioni differenziali, ecc. Riferimenti classici su tale formula sono Bourbaki [Bou], Hausner-Schwartz [HS], Hochschild [Ho], Jacobson [J], Varadarajan [V]. Applicazioni di questo strumento all'Analisi sono trattate per esempio in [Hor, RS, VSC]. Alcune notevoli applicazioni della formula di Campbell-Hausdorff si possono trovare in [DST, E, O, Ot, S, T].

Siccome siamo principalmente interessati ai gruppi e alle algebre di Lie, ricordiamo brevemente come la formula di Campbell-Hausdorff si presenti naturalmente in questo contesto. Sia $(\mathfrak{n},[\cdot,\cdot])$ un'algebra di Lie nilpotente astratta. Per X, $Y \in \mathfrak{n}$ poniamo[1]

$$\begin{aligned} X\diamond Y &:= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{\substack{p_i+q_i\geq 1\\ 1\leq i\leq n}}\frac{(\mathrm{ad\,X})^{p_1}(\mathrm{ad\,Y})^{q_1}\cdots(\mathrm{ad\,X})^{p_n}(\mathrm{ad\,Y})^{q_n-1}Y}{(\sum_{j=1}^n(p_j+q_j))\,p_1!\,q_1!\cdots p_n!\,q_n!} \\ &= X+Y+\tfrac{1}{2}[X,Y]+\tfrac{1}{12}[X,[X,Y]]-\tfrac{1}{12}[Y,[X,Y]] \\ &\quad -\tfrac{1}{48}[Y,[X,[X,Y]]]-\tfrac{1}{48}[X,[Y,[X,Y]]]+\text{commutatori di lunghezza}\geq 5. \end{aligned} \tag{5.1}$$

[1] Usiamo la notazione $(\mathrm{ad}\,A)B = [A,B]$. Inoltre, se $q_n = 0$, il termine nella somma (5.1) è per convenzione $\cdots(\mathrm{ad\,X})^{p_{n-1}}(\mathrm{ad\,Y})^{p_{n-1}}(\mathrm{ad\,X})^{p_n-1}X$. Chiaramente, se $q_n > 1$, o $q_n = 0$ e $p_n > 1$, il termine è zero.

Siccome $\mathfrak{n}$ è nilpotente, (5.1) è una somma finita e $\diamond$ determina un'operazione binaria su $\mathfrak{n}$, definita in modo universale da somme di certi monomi di Lie. Ora, sia $(\mathbb{G}, \circ)$ un gruppo di Lie con algebra $\mathfrak{g}$. Supponiamo che la mappa esponenziale $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ abbia una funzione inversa Log globalmente definita. È dunque ben data su $\mathfrak{g}$ l'operazione

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}(X) \circ \mathrm{Exp}(Y)\right).$$

Con questa legge compositiva, $\mathfrak{g}$ è ovviamente un gruppo di Lie isomorfo a $(\mathbb{G}, \circ)$ via Exp. Dal seguente notevole risultato, segue che questa legge è (sotto opportune ipotesi su $\mathbb{G}$) precisamente la legge intrinseca definita in (5.1), i.e. vale la seguente *formula di Campbell-Hausdorff*

$$\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}(X) \circ \mathrm{Exp}(Y)\right) = X \diamond Y, \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{5.2}$$

Teorema 5.1 ([CG], Theorem 1.2.1). *Sia $(\mathbb{G}, \circ)$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso. Supponiamo che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbb{G}$ sia nilpotente. Allora $\diamond$ definisce una struttura di gruppo di Lie su $\mathfrak{g}$ e* $\mathrm{Exp} : (\mathfrak{g}, \diamond) \to (\mathbb{G}, \circ)$ *è un isomorfismo di gruppi di Lie. In particolare, se* Log *è la funzione inversa di* Exp, *vale* (5.2).

Ricordiamo poi il Terzo Teorema Fondamentale di Lie, un altro risultato profondo della teoria generale dei gruppi di Lie.

Teorema 5.2 ([V], Theorem 3.15.1). *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale. Allora, esiste un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie è isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Dai precedenti due teoremi si ottiene il seguente risultato.

Osservazione 5.1. Se $\mathfrak{n}$ è un'algebra di Lie nilpotente e di dimensione finita, allora $\diamond$ definisce una struttura di gruppo di Lie su $\mathfrak{n}$. Diciamo che $\diamond$ è *l'operazione di Campbell-Hausdorff* su $\mathfrak{n}$.

Ci interessa applicare questa osservazione per mostrare un modo standard di costruire gruppi di Carnot su $\mathbb{R}^N$. Questa costruzione fa uso di $\mathfrak{f}_{m,r}$, l'algebra di Lie libera e nilpotente di passo r e m generatori $E_1, \dots, E_m$. Ricordiamo che, per definizione, $\mathfrak{f}_{m,r}$ è l'unica (a meno di isomorfismi) algebra di Lie nilpotente di passo r generata da m dei suoi elementi $E_1, \dots, E_m$, tale che per ogni algebra di Lie $\mathfrak{n}$ nilpotente di passo r e per ogni applicazione φ da $\{E_1, \dots, E_m\}$ a $\mathfrak{n}$, esiste un (unico) morfismo di algebre $\widetilde{\varphi}$ da $\mathfrak{f}_{m,r}$ a $\mathfrak{n}$ che estende φ. È possibile costruire una base per $\mathfrak{f}_{m,r}$ mediante un semplice algoritmo, dovuto a Hall [H], che ricordiamo brevemente. Gli elementi della *base di Hall per* $\mathfrak{f}_{m,r}$ sono definiti in modo ricorsivo come segue:

- $E_1, \dots, E_m$ (i generatori di $\mathfrak{f}_{m,r}$) sono i primi m elementi della base di Hall e sono detti *i monomi standard di lunghezza* 1;
- se $2 \le n \le r$, supponiamo che i monomi standard di lunghezza $1, \dots, n-1$ siano definiti; supponiamo anche siano ordinati in modo arbitrario, tale che $u \prec v$ se $\mathrm{lungh}(u) < \mathrm{lungh}(v)$; allora $[u, v]$ è un *monomio standard di lunghezza* n se $\mathrm{lungh}(u) + \mathrm{lungh}(v) = n$ e se, inoltre, valgono le seguenti proprietà:
  1. u e v sono monomi standard tali che $u \succ v$;
  2. se $u = [x, y]$ è la forma del monomio standard u, allora $v \succeq y$.

I monomi standard di lunghezza $\le r$ formano una base per $\mathfrak{f}_{m,r}$ e la decomposizione diretta $\mathfrak{f}_{m,r} = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, ove W_i è lo spazio generato dagli elementi della base di lunghezza i, è una stratificazione di $\mathfrak{f}_{m,r}$ (si veda [H, Theorem 3.1]).

Mediante i precedenti risultati è possibile costruire in maniera naturale degli esempi di gruppi

di Carnot omogenei e liberi di passo r ed m generatori (diciamo che un gruppo è *libero* se la sua algebra di Lie è isomorfa a $\mathfrak{f}_{m,r}$, per opportuni m e r). Siano $r \geq 1$ e $m \geq 2$ fissati e si ponga $H := \dim(\mathfrak{f}_{m,r})$. Supponiamo che $\{E_i\}_{i \leq H}$ sia una numerazione della base di Hall per $\mathfrak{f}_{m,r}$ che preserva il suo ordinamento naturale $\preceq$. Definiamo una famiglia di dilatazioni $\{D_\lambda\}_{\lambda>0}$ su $\mathfrak{f}_{m,r}$ mediante $D_\lambda(\sum_{i=1}^H x_i E_i) = \sum_{i=1}^H \lambda^{\alpha_i} x_i E_i$, dove α_i è la lunghezza di E_i. Per finire, identifichiamo $\mathfrak{f}_{m,r}$ con $\mathbb{R}^H$ nel modo naturale introducendo l'isomorfismo di spazi vettoriali $\pi : \mathbb{R}^H \to \mathfrak{f}_{m,r}$, tale che $x \mapsto \sum_{i=1}^H x_i E_i$. Non è difficile provare il seguente risultato (osserviamo esplicitamente che, per l'Osservazione 5.1, $(\mathfrak{f}_{m,r}, \diamond)$ è un gruppo di Lie).

Teorema 5.3. *Con le notazioni precedenti, per ogni x, $y \in \mathbb{R}^H$ e $\lambda > 0$ si pone*

$$x \circ y := \pi^{-1}\big(\pi(x) \diamond \pi(y)\big), \qquad \delta_\lambda(x) := \pi^{-1}\big(D_\lambda(\pi(x))\big).$$

Allora $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^H, \circ, \delta_\lambda)$ è un gruppo di Carnot omogeneo e libero.

Diamo un semplicissimo esempio di una tale costruzione per un gruppo di Carnot omogeneo e libero $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^{10}, \circ, \delta_\lambda)$ di passo 2 e 4 generatori. Supponiamo $\mathfrak{f}_{4,2}$ sia generata da $E_1, \ldots, E_4$. La base di Hall $E_1, \ldots, E_{10}$ per $\mathfrak{f}_{4,2}$ è data da

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4; \quad [E_2, E_1],\ [E_3, E_1],\ [E_4, E_1],\ [E_3, E_2],\ [E_4, E_2],\ [E_4, E_3].$$

Le dilatazioni su $\mathbb{G}$ sono definite da $\delta_\lambda(x) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_4, \lambda^2 x_5, \ldots, \lambda^2 x_{10})$. La formula di Campbell-Hausdorff su un'algebra di Lie nilpotente di passo 2 è data da $X \diamond Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$. La legge di gruppo $\circ$ si ottiene semplicemente scrivendo esplicitamente $\sum_{i \leq 10} x_i E_i \diamond \sum_{j \leq 10} y_j E_j$ rispetto alla base di Hall, facendo uso dell'antisimmetria e delle identità di Jacobi.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i\leq 10} x_i E_i \diamond \sum_{j \leq 10} y_j E_j &= \textstyle\sum_{i \leq 10} x_i E_i + \sum_{j \leq 10} y_j E_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq 10} x_i y_j [E_i, E_j] = \cdots \\ &= \textstyle\sum_{i \leq 4} (x_i + y_i) E_i + (x_5 + y_5 + \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)) E_5 + \cdots \\ &\quad \cdots + (x_{10} + y_{10} + \tfrac{1}{2}(x_4 y_3 - x_3 y_4)) E_{10}.\end{aligned}$$

Questo dà, per ogni x, $y \in \mathbb{G}$,

$$\begin{aligned} x \circ y = \big(&x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5 + x_2 y_1 + x_1 y_2, x_6 + y_6 + \tfrac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3), \\ &x_7 + y_7 + \tfrac{1}{2}(x_4 y_1 - x_1 y_4), x_8 + y_8 + \tfrac{1}{2}(x_3 y_2 - x_2 y_3), \\ &x_9 + y_9 + \tfrac{1}{2}(x_4 y_2 - x_2 y_4), x_{10} + y_{10} + \tfrac{1}{2}(x_4 y_3 - x_3 y_4)\big).\end{aligned}$$

Parte 2. Traccia della prova del Lemma 3.4.

In questa sezione, $X_1, \ldots, X_m$ sono campi vettoriali soddisfacenti le ipotesi **(H0)-(H1)-(H2)** della Sezione 2. Poniamo $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{X_1, \ldots, X_m\}$. Ricordiamo che r è il passo di nilpotenza di $\mathfrak{g}$.

Teorema 5.4. *Siano X, $Y \in \mathfrak{g}$ fissati. Sia Z l'operatore differenziale definito dal seguente sviluppo*

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \Big(\sum_{k_1+k_2=1}^{r} \frac{X^{k_2} Y^{k_1}}{k_1!\, k_2!} \Big)^j = Z + \\ \big\{\text{addendi del tipo } c \cdot Y^{y_n} X^{x_n} \cdots Y^{y_1} X^{x_1} \text{ con } \textstyle\sum_{i=1}^n (y_i + x_i) > r\big\}.$$

Allora Z è un campo vettoriale appartenente a $\mathrm{Lie}\{X, Y\}$ *(e quindi in* $\mathfrak{g}$*) tale che*

$$\exp[Y]\big(\exp[X](x)\big) = \exp[Z](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Fissiamo X, $Y \in \mathfrak{g}$. Cominciamo con l'osservare che, con argomenti simili a quelli usati nella prova della Proposizione 3.1, si riconosce facilmente che l'applicazione $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \ni (t,x) \mapsto \exp[tX](x)$ ha componenti polinomiali. Inoltre si ha

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i + x_i) > r \quad \Rightarrow \quad Y^{y_n}X^{x_n}\cdots Y^{y_1}X^{x_1}I \equiv 0. \tag{5.4}$$

Siccome $\exp[tX](x)$ è una funzione analitica di t, (3.2) dà $\exp[X] \equiv \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}X^k I$. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$ e poniamo $\Phi(t_1,t_2) := \exp[t_1 Y](\exp[t_2 X](x))$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Chiaramente ogni componente di Φ è un polinomio in t_1, t_2. Si ha inoltre

$$\left(\tfrac{d^k}{dt^k}\right)_{t=0}(f(\exp[tX](x))) = (X^k f)(x), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N),\ k\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^N.$$

Questo dà, per ogni k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}}\right)\Big|_{(t_1,t_2)=(0,0)}\Phi(t_1,t_2) &= \left(\frac{\partial^{k_2}}{\partial t_2^{k_2}}\right)_{t_2=0}\left(\frac{\partial^{k_1}}{\partial t_1^{k_1}}\right)_{t_1=0} I(\exp[t_1Y](\exp[t_2X](x)))\\ &= \left(\frac{\partial^{k_2}}{\partial t_2^{k_2}}\right)_{t_2=0}(Y^{k_1}I)(\exp[t_2X](x)) = (X^{k_2}Y^{k_1}I)(x).\end{aligned}$$

Avendo Φ componenti polinomiali e da (5.4), si ottiene

$$\exp[Y](\exp[X](x)) = \Phi(1,1) = \sum_{k_1+k_2=0}^{r}\frac{1}{k_1!\,k_2!}(X^{k_2}Y^{k_1}I)(x). \tag{5.5}$$

Introduciamo ora l'operatore differenziale di ordine superiore

$$W(t,X,Y) := \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\sum_{k_1+k_2=1}^{r}\frac{t^{k_1+k_2}}{k_1!\,k_2!}X^{k_2}Y^{k_1}\right)^j.$$

Sviluppiamo formalmente $W(t,X,Y)$ ed ordiniamolo come polinomio in t, ponendo

$$W(t,X,Y) = \sum_{k=1}^{r}t^k Z_k(X,Y) + \sum_{k=r+1}^{r^2}t^k Z_k(X,Y) =: Z(t,X,Y) + R(t,X,Y).$$

È facile riconoscere che, da (5.4), si ha $(R(t,X,Y))^k I \equiv 0$, per ogni $k \geq 0$. Si ha

$$Z_k(X,Y) \in \mathrm{Lie}\{X,Y\}, \quad \forall k \leq r. \tag{5.6}$$

Da (5.6) il teorema segue facilmente. Infatti, se poniamo $Z := Z(1,X,Y)$, segue $Z \in \mathfrak{g}$ e inoltre

$$\begin{aligned}\exp[Z](x) &= \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}Z^k I(x) = \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}(Z(1,X,Y)+R(1,X,Y))^k I(x)\\ &= \sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\sum_{k_1+k_2=1}^{r}\frac{1}{k_1!\,k_2!}X^{k_2}Y^{k_1}\right)^j\right]^k I(x)\\ &= I(x) + \sum_{k_1+k_2=1}^{r}\frac{1}{k_1!\,k_2!}X^{k_2}Y^{k_1}I(x) = \exp[Y](\exp[X](x)).\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue da (5.5), mentre la quarta è una conseguenza dello sviluppo in serie dell'identità $1+x = \exp(\log(1+x))$, unitamente a (5.4). Per finire, (5.6) è provata in [D]. In tale articolo vengono utilizzate serie formali in due indeterminate non commutative X e Y. Mediante gli argomenti di nilpotenza poc'anzi utilizzati, è facile riconoscere che le identità tra serie formali in [D] sono consistenti anche nel nostro contesto. ■

Riferimenti bibliografici

[A] ALTAFINI, C.: *A matrix Lie group of Carnot type for filiform sub-Riemannian structures and its applications to Control Systems in chained form*, d'Azedo Breda, A. M. (ed.) et al., Proc. Summer School on Diff. Geometry Dep. de Matemática, Universidade de Coimbra September 1999, 59-66.

[B] BARBANO, P. E.: *Automorphisms and quasi-conformal mappings of Heisenberg-type groups*, J. Lie Theory **8** (1998) No. 2, 255–277.

[Bo] BONFIGLIOLI, A.: *Carnot groups related to sets of vector fields*, apparirà nel Bollettino U.M.I.

[BL1] BONFIGLIOLI, A., LANCONELLI, E.: *Liouville-type theorems for real sub-Laplacians*, Manuscripta Math. **105** (2001), 111–124.

[BL2] BONFIGLIOLI, A., LANCONELLI, E.: *Maximum Principle on unbounded domains for sub-Laplacians: a Potential Theory approach*, Proc. Am. Math. Soc. **130** (2002), 2295–2304.

[BL3] BONFIGLIOLI, A., LANCONELLI, E.: *Subharmonic functions on Carnot groups*, apparirà in Math. Ann.

[BLU] BONFIGLIOLI, A., LANCONELLI, E., UGUZZONI, F.: *Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups*, Adv. Differential Equations **7** (2002), 1153–1192.

[BU] BONFIGLIOLI, A., UGUZZONI, F.: *Families of diffeomorphic sub-Laplacians and free Carnot groups*, apparirà in Forum Math.

[BiL] BIRINDELLI, I., LANCONELLI, E.: *A note on one dimensional symmetry in Carnot groups*, apparirà in Rendiconti dell'Accademia dei Lincei.

[BP] BIRINDELLI, I., PRAJAPAT, J.: *One dimensional symmetry in the Heisenberg group*, to appear on Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[Bou] BOURBAKI, N.: *Lie Groups and Algebras*, Hermann, Paris, 1975, Chapters 1, 2.

[C] CAPOGNA, L.: *Regularity for quasilinear equations and 1-quasiconformal maps in Carnot groups*, Math. Ann. **313** No.2 (1999), 263–295.

[CDKR] COWLING, M., DOOLEY, A., KORÁNYI, A., RICCI, F.: *An approach to symmetric spaces of rank one via groups of Heisenberg type*, J. Geom. Anal. **8** No.2 (1998), 199–237.

[CG] CORWIN, L.J., GREENLEAF, F.P.: *Representations of nilpotent Lie groups and their applications (Part I: Basic theory and examples)*, Cambridge University Press.

[DST] DAY, J., SO, W., THOMPSON, R.C.: *Some properties of the Campbell Baker Hausdorff series*, Linear Multilinear Algebra **29** No. 3/4 (1991), 207–224.

[D] Ž. DJOKOVIĆ, D.: *An Elementary Proof of the Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin Formula*, Math. Z. **143** (1975), 209–211.

[E] EGGERT, A.: *Extending the Campbell-Hausdorff multiplication*, Geom. Dedicata **46** No. 1, (1993), 35–45.

[F] FOLLAND, G.B.: *Subelliptic Estimates and Function Spaces on Nilpotent Groups*, Arkiv för Mat. **13** (1975), 161–207.

[FS] FOLLAND, G.B., STEIN, E.M.: *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, **28**. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[FF] FRANCHI, B., FERRARI, F.: *A local doubling formula for the harmonic measure associated with sub-elliptic operators*, preprint (2001).

[FSS] FRANCHI, B., SERAPIONI, R., SERRA CASSANO, F.: *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Mathematische Annalen **321** No.3, 479–531.

[GV1] GAROFALO, N., VASSILEV, D.: *Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups*, Math. Ann. **318** No.3 (2000), 453–516.

[GV2] GAROFALO, N., VASSILEV, D.: *Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type*, Duke Math. J. **106** No.3 (2001), 411–448.

[GK] GOLÉ, C., KARIDI, R.: *A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie groups*, J. Dyn. Control Syst. **1** No.4 (1995), 535–549.

[HK] HAJLASZ, P., KOSKELA, P.: *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000), no. 688.

[H] HALL, M.: *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 575–581.

[HS] HAUSNER, M., SCWARTZ, J.T.: *Lie groups and Lie algebras*, Gordon and Breach, New York, 1968.

[HH] HEINONEN, J., HOLOPAINEN, I: *Quasiregular maps on Carnot groups*, J. Geom. Anal. **7** (1997), 109–148.

[Ho] HOCHSCHILD, G.: *La structure de groupes de Lie*, Dunod, Paris, 1968.

[Hor] HÖRMANDER, L.: *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[J] JACOBSON, N.: *Lie Algebras*, Wiley, New York, 1962.

[LPo] LANCONELLI, E., POLIDORO, S.: *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **52**, 1 (1994), Partial Diff. Eqs. 29–63.

[MSS] MONTGOMERY, R., SHAPIRO, M. STOLIN, A.: *A nonintegrable sub-Riemannian geodesic flow on a Carnot group*, J, Dyn. Control Syst. **3** No.4, (1997), 519–530.

[MM] MONTI, R., MORBIDELLI, D.: *Regular domains in homogeneous spaces*, preprint (2001).

[MS] MONTI, R., SERRA CASSANO, F.: *Surface masures in Carnot-Caratheodory spaces*, apparirà su Calculus of Variations.

[O] OKIKIOLU, K.: *The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula*, Duke Math. J. **79** No.3, (1995), 687-722.

[Ot] OTEO, J.A.: *The Baker-Campbell-Hausdorff formula and nested commutator identities*, J. Math. Phys. **32** No.2, (1991), 419-424.

[RS] ROTHSCHILD, L.P., STEIN, E.M.: *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976), 247–320.

[S] STRICHARTZ, R.S.: *The Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formula and solutions of differential equations*, J. Funct. An. **72**, (1987), 320-345.

[T] THOMPSON, R.C.: *Cyclic relations and the Goldberg coefficients in the Campbell-Baker-Hausdorff formula*, Proc. Am. Math. Soc. **86**, (1982), 12-14.

[V] VARADARAJAN, V.S.: *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Springer Verlag, 1984.

[VSC] VAROPOULOS, N.T., SALOFF-COSTE, L., COULHON, T.: *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Mathematics **100**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.